

إمتحان السداسي الثاني في مادة التحليل 1

التمرين 01 : (06 ن)

(1) ما هو النشر المحدود من الرتبة 4 في جوار 1 للدالة :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

(2) أحسب النهاية التالية باستعمال النشر المحدود :

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\left(\frac{1}{1-x}\right)}.$$

التمرين 02 : (06 ن)

أحسب التكاملات التالية :

$$1. \int \frac{x^2+2x+12}{x^2-2x+10} dx.$$

$$2. \int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} dx.$$

$$3. \int \frac{dx}{\sin(x)+\sin(2x)}.$$

مع العلم أن :

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$$

التمرين 03 : (6.5 ن)

ليكن

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-3x} dx$$

(1) برهن أن : I_n موجود و موجب.

(2) أحسب I_0, I_1 و I_2 .

(3) عين علاقة تراجعية بين I_n و I_{n-1} من أجل كل $n \geq 1$.

(4) إستنتج $\int_0^1 (3x^2 - 5x + 7) e^{-3x} dx$.

الحل النموذجي لمتحان الداسي الثاني في مادة
 التحليل 01.

التمرين 01: $\frac{1}{2}$ إيجاد النشر المحدود من الرتبة 4 في جوار 1 لـ $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$. (6)

لنضع $y = x - 1$ أي: $x = y + 1$

وهنا، لما $x \rightarrow 1$ فإن $y \rightarrow 0$. إذن: نفرض $x = y + 1$ في

$$f(y+1) = \frac{\ln(y+1)}{(1+y)^2} = \frac{\ln(y+1)}{1+2y+y^2}$$

وهنا، لنكتب النشر المحدود من الرتبة 4 في جوار 0 لـ $\ln(y+1)$

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + O(y^4)$$

إذن، للحصول على $f(y+1)$ نقوم بإجراء القسمة التالية حسب المتوى المتضاعف y حتى الرتبة 4 أي:

$y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}$	$1 + 2y + y^2$
$-y - 2y^2 - y^3$	$y - \frac{5}{2}y^2 + \frac{13}{3}y^3 - \frac{17}{12}y^4$
$-\frac{5}{2}y^2 - \frac{4}{3}y^3 - \frac{y^4}{4}$	
$\frac{5}{2}y^2 + \frac{5}{3}y^3 + \frac{5}{2}y^4$	
$\frac{13}{3}y^3 + \frac{9}{4}y^4$	
$-\frac{13}{3}y^3 - \frac{26}{3}y^4$	
$-\frac{77}{12}y^4$	

إذن: $f(y+1) = y - \frac{5}{2}y^2 + \frac{13}{3}y^3 - \frac{77}{12}y^4 + O(y^4)$ (2)

أي أن: $y = x - 1$ فإن $f(x) = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{13}{3}(x-1)^3 - \frac{77}{12}(x-1)^4 + O((x-1)^4)$ (9.25)

2/ حساب النهاية التالية باستعمال التفاضل والتكامل

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\left(\frac{1}{1-x}\right)} = 1^{\infty} \text{ نوع } \infty \cdot 0$$

(0,21)

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\left(\frac{1}{1-x}\right)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x}$$

نضع $y = x - 1$ أي $x = y + 1$ ، ولما $x \rightarrow 1$ فإن $y \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{1-x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{1-y-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} \quad (0/0)$$

لدينا هنا سبقنا d في جوار 0 ، والآن $y \mapsto \ln(y+1)$

$$\ln(y+1) = y + o(y)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} = 1 \quad \text{وكتبت: } 1$$

إذاً $0/0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\left(\frac{1}{1-x}\right)} = e^{-\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad (0,21)$$

التمرين 02 - حساب التكاملات التالية: (07)

$$\frac{1}{I_1} \int \frac{x^2 + 2x + 12}{x^2 - 2x + 10} dx = \int \frac{x^2 - 2x + 10 + 4x + 2}{x^2 - 2x + 10} dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{4x + 2}{x^2 - 2x + 10} \right) dx = \int dx + 2 \int \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 10} dx$$

$$= x + 2 \int \frac{2x - 2 + 2 + 1}{x^2 - 2x + 10} dx = x + 2 \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 10} dx + 6 \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 10}$$

$$= x + 2 \ln |x^2 - 2x + 10| + 6 \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 10} \quad (1)$$

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 10} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 - 1 + 10} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 9} \quad \text{لحساب } I$$

$$= \int \frac{dx}{9 \left(\left(\frac{x-1}{3} \right)^2 + 1 \right)} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{3} \right)^2 + 1} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{3} \right) + C \quad (07)$$

(216)

$$\int \frac{x^2 + 2x + 12}{x^2 - 2x + 10} dx = x + 2 \ln |x^2 - 2x + 10| + 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{3} \right) + C \quad (0,25)$$

$$\frac{2}{2} \int \frac{dx}{\sin(x) + \sin(2x)}$$

$$t = \cos(x) \quad \left. \begin{array}{l} dt = -\sin(x) dx \Rightarrow dx = \frac{-dt}{\sin(x)} \end{array} \right\} (0,25)$$

$$\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)} = \sqrt{1 - t^2}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) = 2 \sqrt{1 - t^2} \cdot t$$

$$dx = \frac{-dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sin(x) + \sin(2x)} = \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2} + 2t\sqrt{1 - t^2}} \cdot \frac{-dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

$$= - \int \frac{dt}{(1 - t^2) + 2t(1 - t^2)} = - \int \frac{dt}{(1 - t^2)(1 + 2t)}$$

$$= - \int \frac{dt}{(1+t)(1-t)(1+2t)}$$

$$\frac{1}{(1+t)(1-t)(1+2t)} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{1-t} + \frac{c}{1+2t}$$

$$(0,75) \quad \boxed{a = -1/2}, \boxed{b = 1/6}, \boxed{c = 4/3} \quad \text{بالطريقة جسيم}$$

$$I_2 = - \int \frac{dt}{(1+t)(1-t)(1+2t)} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{6} \int \frac{dt}{1-t} - \frac{4}{3} \int \frac{dt}{1+2t}$$

$$= \frac{1}{2} \ln |1+t| + \frac{1}{6} \ln |1-t| - \frac{2}{3} \ln |1+2t| + C \quad (0,75)$$

$$I_2 = \ln |1 + \cos(x)| + \frac{1}{6} \ln |1 - \cos(x)| - \frac{2}{3} \ln |1 + 2\cos(x)| + C \quad (0,25)$$

$$3/ I_3 = \int \frac{\cos(x)}{1 + \cos(x)} dx$$

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$I_3 = \int \frac{\cos(x)}{1 + \cos(x)} dx = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1-t^2}{1+t^2} dt$$

$$= - \int \frac{t^2 + 1 - 1 - 1}{t^2 + 1} dt = - \int dt + 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$= -t + 2 \operatorname{arctg}(t) + C$$

$$I_3 = -\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$$

$$I_3 = -\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + x + C$$

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-3x} dx$$

1. ابرهنا ان $I_n \geq 0$ موجود و $I_n \geq 0$

لدينا $x \mapsto x^n$ مستمرة على $\mathbb{R}$ ، كذلك $x \mapsto e^{-3x}$ مستمرة على $\mathbb{R}$

ومنه $x \mapsto x^n e^{-3x}$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ إذاً فهي مستمرة على $[0, 1]$

إذاً فهي قابلة للتكامل نضع $f(x) = x^n e^{-3x}$ ولدينا $I_n = \int_0^1 f(x) dx$

ولدينا: $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq x^n$ و $e^{-3x} > 0$ 1

إذاً $\forall x \in [0, 1] : x^n e^{-3x} \geq 0$ 0,1
ومنه: $\int_0^1 x^n e^{-3x} dx \geq 0 \Rightarrow I_n \geq 0$

2. حساب I_0, I_1, I_2

• $I_0 = \int_0^1 e^{-3x} dx = \left[-\frac{1}{3} e^{-3x} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} e^{-3} + \frac{1}{3}$ 0,1

• $I_1 = \int_0^1 x e^{-3x} dx$

نستعمل التكامل بالتجزئة لنضع:

0,1 $\begin{cases} u = x \\ u' = 1 \\ v' = e^{-3x} \\ v = -\frac{1}{3} e^{-3x} \end{cases}$

$I_1 = \int_0^1 x e^{-3x} dx = \left[-\frac{x}{3} e^{-3x} \right]_0^1 + \frac{1}{3} \int_0^1 e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} e^{-3} + \frac{1}{3} I_0$ 0,2

$= -\frac{1}{3} e^{-3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} e^{-3} = -\frac{4}{9} e^{-3} + \frac{1}{9}$ 0,2

• $I_2 = \int_0^1 x^2 e^{-3x} dx$

نستعمل التكامل بالتجزئة لنضع:

0,2 $\begin{cases} u = x^2 \\ u' = 2x \\ v' = e^{-3x} \\ v = -\frac{1}{3} e^{-3x} \end{cases}$

$I_2 = \int_0^1 x^2 e^{-3x} dx = \left[-\frac{x^2}{3} e^{-3x} \right]_0^1 + \frac{2}{3} \int_0^1 x e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} e^{-3} + \frac{2}{3} I_1$ 0,1

$= -\frac{1}{3} e^{-3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{4}{9} e^{-3} + \frac{1}{9} \right) = -\frac{17}{27} e^{-3} + \frac{2}{27}$ 0,2

لتعيين علاقة تراجعية بين I_n و I_{n-1} من أجل كل $n \geq 1$ ليكن

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-3x} dx.$$

لتكامل بالتجزئة، نضع :-

$$\textcircled{0,25} \quad \begin{cases} u = x^n \\ v' = e^{-3x} \end{cases}$$

$$, u' = n x^{n-1}$$

$$, v = -\frac{1}{3} e^{-3x}.$$

وقد :-

$$I_n = \left. -\frac{x^n}{3} e^{-3x} \right|_0^1 + \frac{n}{3} \int_0^1 x^{n-1} e^{-3x} dx \quad \textcircled{0,25}$$

$$= -\frac{1}{3} e^{-3} + \frac{n}{3} I_{n-1} \quad \textcircled{0,25}$$

$$\boxed{I_n = -\frac{1}{3} e^{-3} + \frac{n}{3} I_{n-1}}$$

إذا ما أجل كل $n \geq 1$

4! ! شتتاج : $\int_0^1 (3x^2 - 5x + 7) e^{-3x} dx$ \textcircled{0,25}

$$\int_0^1 (3x^2 - 5x + 7) e^{-3x} dx = 3 \int_0^1 x^2 e^{-3x} dx - 5 \int_0^1 x e^{-3x} dx + 7 \int_0^1 e^{-3x} dx$$

$$= 3 I_2 - 5 I_1 + 7 I_0 = 3 \left(-\frac{1}{9} e^{-3} + \frac{2}{9} \right) - 5 \left(-\frac{1}{3} e^{-3} + \frac{1}{3} \right) + 7 \left(-\frac{1}{3} e^{-3} + \frac{1}{3} \right) \quad \textcircled{0,75}$$

$$= \frac{4}{3} \left(1 - e^{-3} \right) \quad \textcircled{0,25}$$

انتهى